

Семинар сабақ №2. Шеттері бекітілген вариациялық есептер

Аудитория тапсырмасы №2

2.1. Функционал экстремалін табыңыз

$$J[y] = \int_a^b (yy' + y'^2) dx, \quad y(a) = y_1, \quad y(b) = y_2.$$

2.2. $J[y]$ функционалының берілген шеттік шарттарды қанағаттандыратын экстремалдарын табыңыз

а) $J[y] = \int_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi/2) = 1;$

б) $J[y] = \int_0^1 (y'^2 + 12xy) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1;$

в) $J[y] = \int_{\pi}^{2\pi} (4y'^2 - 7yy' - y^2) dx, \quad y(\pi) = 0, \quad y(2\pi) = 0;$

г) $J[y] = \int_1^2 y'^2 e^{\cos y'} dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = -4;$

д) $J[y] = \int_0^{\pi/8} (16y^2 + y'^2 + 2y(\sin x + 16x)) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi/8) = -\pi/8$

2.3. Функционалдың берілген шеттік шарттарды қанағаттандыратын экстремалдарын табыңыз:

а) $J[y_1, y_2] = \int_0^{\pi/2} (y_1' y_2' - y_1 y_2) dx, \quad y_1(0) = 0,$

$$y_1(\pi/2) = 1, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2(\pi/2) = 1.$$

б) $J[y_1, y_2] = \int_1^3 (xy_1'^2 y_2'^2 - xy_1 y_2) dx, \quad y_1(1) = 1,$

$$y_1(3) = \ln 3 + 1, \quad y_2(1) = 0, \quad y_2(3) = 0.$$

в) $J[y_1, y_2] = \int_0^{\pi/2} (y_1'^2 + y_2'^2 + 3y_1 y_2) dx, \quad y_1(0) = 0,$

$$y_1(\pi/2) = 1, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2(\pi/2) = -1.$$

г) $J[y_1, y_2] = \int_0^{\pi/4} (2y_1 - 4y_2^2 + y_2'^2 - y_1'^2) dx, \quad y_1(0) = 0,$

$$y_1(\pi/4) = 1, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2(\pi/4) = 1.$$

$$д) J[y_1, y_2] = \int_0^1 (2y_1 + y_2'^2 + y_1'^2) dx, y_1(0) = 1,$$

$$y_1(1) = \frac{3}{2}, y_2(0) = 1, y_2(1) = 1.$$

Үй тапсырмасы № 2

Мына 2.4.-2.16. есептеріндегі берілген шарттарды қанағаттандыратын экстремалді анықтаңыз:

$$2.4. J = \int_{-1}^1 x^2 y'^2 dx, y(-1) = -1, y(1) = 1;$$

$$2.5. J = \int_0^1 y y'^2 dx; y(0) = 0, y(1) = 1;$$

$$2.6. J = \int_0^1 (1+x) y'^2 dx, y(0) = 0, y(1) = 1;$$

$$2.7. J = \int_0^1 y^2 y'^2 dx; y(0) = 0, y(1) = 1;$$

$$2.8. J = \int_0^{3\pi/2} (y'^2 - x^2) dx; y(0) = y(3\pi/2) = 0;$$

$$2.9. J = \int_0^1 y'^2(x) dx \rightarrow \inf, y(0) = 1, y(1) = 0;$$

$$2.10. J = \int_0^{3/2} (y'^2 + 2y) dx \rightarrow \inf, y(0) = 0, y(3/2) = 1;$$

$$2.11. J = \int_1^e x y'^2 dx \rightarrow \inf, y(1) = e, y(e) = 1.$$

$$2.12. J = \int_2^3 (x^2 - 1) y'^2 dt \rightarrow \inf, y(2) = 0, y(3) = 1;$$

$$2.13. J = \int_0^1 (y'^2 + y y' + 12yx) dx \rightarrow \inf, y(0) = y(1) = 0;$$

$$2.14. J = \int_0^1 (4y \sin x - y^2 - y'^2) dx \rightarrow \inf, y(0) = y(1) = 0;$$

$$2.15. J = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + 4y \operatorname{sh} x) dx \rightarrow \inf, y(0) = -1, y(1) = 0.$$

$$2.16. J = \int_0^{\pi/2} (2y + y^2 - y'^2) dx \rightarrow \inf, y(0) = y(\pi/2) = 0; .$$

Мына 2.17.-2.26. есептеріндегі берілген шарттарды қанағаттандыратын экстремалді анықтаңыз:

$$2.17. \int_0^1 (y_1'^2 + y_2'^2 - 2y_1y_2) dx \rightarrow \inf, y_1(0) = y_2(0) = 0, y_1(1) = sh1, y_2(1) = -sh1.$$

$$2.18. \int_0^1 (y_1'^2 y_2'^2 + y_1y_2) dx \rightarrow \inf, y_1(0) = y_2(0) = 1, y_1(1) = e, y_2(1) = 1/e.$$

$$2.19. \int_0^1 (y_1'y_2' + 6y_1x + 12y_2x^2) dx \rightarrow \inf, y_2(0) = y_1(0) = 0, y_1(1) = y_2(1) = 1.$$

$$2.20. \int_0^{\pi/2} (y_1'^2 - y_1y_2) dx \rightarrow \inf, y_1(0) = y_2(0) = 0, y_1(\pi/2) = 1, y_2(\pi/2) = -1.$$

$$2.21. \int_0^1 (y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_1'y_2') dx \rightarrow extr; y_1(0) = y_2(0) = 0, y_1(1) = y_2(1) = sh1.$$

$$2.22. \int_0^1 (y_1'^2 + y_2'^2 - 12y_1y_2) dx \rightarrow extr; y_1(0) = y_2(0) = 0, y_1(1) = sh1, y_2(1) = -sh1.$$

2.23.

$$\int_0^1 (6y_1'^2 + y_2'^2 - 2y_1y_2) dx \rightarrow extr; y_1(0) = y_2(0) = 0, y_1(1) = sh1, y_2(1) = -sh1.$$

$$2.24. \int_0^1 (y_1'^2 + y_2'^2 - 8y_1y_2) dx \rightarrow extr; y_1(0) = y_2(0) = 0, y_1(1) = sh1, y_2(1) = -sh1.$$

2.25.

$$\int_0^1 (5y_1'^2 + 2y_2'^2 - 2y_1y_2) dx \rightarrow extr; y_1(0) = y_2(0) = 0, y_1(1) = sh1, y_2(1) = -sh1.$$

$$2.26. \int_0^1 (6y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_1'y_2') dx \rightarrow extr; y_1(0) = y_2(0) = 0, y_1(1) = y_2(1) = sh1.$$